黒木玄 Gen Kuroki
@genkuroki

練習問題：函数

$$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{1/x} & (x\neq 0)\\ e & (x=0)\end{cases}$$

の $x=0$ でのTaylor展開の最初の数項を求めよ。

これ結構教育的問題。

$(1+x)^{1/x}$ は $x=0$ で解析的。

二項展開するとはまります。(あえて大変な計算をしたい人は楽しめるかも。)

解答は次のトゥートで。

2017年04月30日 15:06 · Web · 0 · 3 · Webで開く

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki on Apr 30
$(1+x)^{1/x}$ のべき級数展開の問題に関する解答です。 もっと見る

解答例：$0<|x|<1$ のとき

$$\begin{aligned}\log f(x)&=\frac{1}{x}\log(1+x)\\&=\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right)\\&=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots\end{aligned}$$

であり、この結論は $x=0$ でも正しいので、$|x|<1$ のとき

$$\begin{aligned}f(x)&=\exp\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots\right)\\&=e\,e^{-x/2}\,e^{x^2/3}\,e^{-x^3/4}\,\cdots\\&=e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{11x^2}{24}-\frac{7x}{16}+\cdots\right).\end{aligned}$$

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki on Apr 30
$(1+g(x))^{1/x}$ の $x\to 0$ での取り扱いの基本 もっと見る

対数をとってからTaylor展開すると易しくなります。

数学を使う場面では「その量そのものではなく、対数を取ったものの方がわかりやすい」もしくは「$\exp(\sim)$ の形で扱いたくなる」ということはものすごくよくあります。

たとえば、統計力学では分配函数の対数を取って考えることが普通です(自由エネルギー)。

より一般に大偏差原理によってラプラスの方法が使える場合も対数を取って考えていると思うことができます。

あと次のリンク先でのテータ函数の取り扱いも $\exp(\sim)$ の形に書き直して扱っていることが本質的。
ac.cyberhome.ne.jp/~narukawa/t…

あと合同ゼータ函数の定義の仕方とか。

他にもリンク先PDFにおける相互法則の取り扱いとか。
github.com/genkuroki/CCSymbol/…

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on Apr 30
以上の話を理解できれば瞬殺できる問題：次を示せ：

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\sqrt{n}\,y}\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n = e^{-y^2/2}$$

この結果の応用には次があります。

スターリングの近似公式の証明：$n\to\infty$ で、$x = n+\sqrt{n}\,y$ とおくと、

$$\begin{aligned} n! = \Gamma(n+1) &= \int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx \\ &= n^n e^{-n}\sqrt{n}\int_{-\sqrt{n}}^\infty e^{-\sqrt{n}\,y}\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n dy \\ &\sim n^n e^{-n}\sqrt{n}\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2/2}\,dy \\ &= n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}. \end{aligned}$$

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on Apr 30
補足。WolframAlphaのすすめ。

特別なソフトも入れなくても、特別な知識もなくても、次の場所にアクセスすれば $(1+x)^{1/x}$ のべき級数展開がわかります。
wolframalpha.com/input/?i=seri…

WolframAlphaのよいところは入力がイーカゲンであってもそれなりに情報を返してくれることです。

mathtod.online powered by Mastodon